Ad-Soyad :

Numara :

1	2	3	4	5	6	7	8	Toplam

18.11.2019

2019-2020 Güz Dönemi ANALİZ III (A-B) Arasınav Soruları

1. $\int_0^1 \frac{x^n}{x+1}dx$ integralinin varlığını n sayısına bağlı olarak değerlendiriniz.

2. $\int_1^\infty \frac{\sin(x^3)}{x+e^{2x}}dx$ has olmayan integralinin mutlak ve koşullu yakınsaklığını araştırınız.

3. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}dx$ integralinin Cauchy esas değerini bulunuz.

4. Eğer f ve g iki pozitif fonksiyon, a noktası bu iki fonksiyonun $[a,b]$ kapalı aralığındaki tek singüler noktası ve her $x \in [a,b]$ için $f(x) \leq g(x)$ ise, o zaman $\int_a^b g(x)dx$ has olmayan integrali yakınsak ise $\int_a^b f(x)dx$ has olmayan integralinin de yakınsak olduğunu ispatlayınız.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$ serisinin toplamını bulunuz.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{\pi}{2^n} + \frac{(n+1)!}{2^n \cdot n!} \right)$ serisinin karakterini araştırınız.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log n}$ serisinin koşullu yakınsak olup olmadığını araştırınız.

8. Bir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli serisi verilsin ve $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ olsun. Bu takdirde $L<1$ ise seri yakınsaktır, $L>1$ ise seri ıraksaktır, ispatlayınız.

NOT: Sadece 6 soru cevaplayınız.

Not: Süre 110 dakikadır.

BAŞARILAR....

Prof. Dr. Cenap DUYAR - Doç. Dr. Ayşe SANDIKÇI

2019-2020 Güz Dönemi ANALİZ III (A-B) Dersi Arasınavı Soruları ve Cevapları

1- $\int_0^1 \frac{x^n}{x+1}dx$ integralinin varlığını n sayısına bağlı olarak değerlendiriniz.

Çözüm. $n \geq 0$ ise $\int_0^1 \frac{x^n}{x+1}dx$ bir has integral olup, değeri sonlu olur.

$-1 < n < 0$ ise $1 > -n > 0$ ve

$$\int_0^1 \frac{x^n}{x+1}dx < \int_0^1 x^n dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{-n}}$$

olup, $\int_0^1 \frac{dx}{x^{-n}}$ yakınsak olduğundan karşılaştırma testine göre $\int_0^1 \frac{x^n}{x+1}dx$ yakınsak olur.

$n \leq -1$ olsun o zaman $-n \geq 1$ ve

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^n/(x+1)}{x^n} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x+1} = 1$$

olup, $\int_0^1 x^n dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{-n}}$ ıraksak olduğundan limit karşılaştırma testine göre $\int_0^1 \frac{x^n}{x+1}dx$ ıraksak olur.

2- $\int_1^\infty \frac{\sin(x^3)}{x+e^{2x}}dx$ has olmayan integralinin mutlak ve koşullu yakınsaklığını araştırınız.

Çözüm. $\forall x \in [1,\infty)$ için $\left|\frac{\sin(x^3)}{x+e^{2x}}\right| \leq \frac{1}{x+e^{2x}} \leq \frac{1}{e^{2x}} = e^{-2x}$

ve

$$\int_1^\infty e^{-2x}dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b e^{-2x}dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\Big|_{x=1}^{x=b}\right)$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{e^{-2}}{2} - \frac{e^{-2b}}{2}\right) = \frac{e^{-2}}{2}$$

olduğundan $\int_1^\infty e^{-2x}dx$ yakınsaktır, karşılaştırma testine göre $\int_1^\infty \frac{\sin(x^3)}{x+e^{2x}}dx$ mutlak yakınsak olur.

3- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}dx$ integralının Cauchy esas değe-
rini bulunuz.

Çözüm.

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\left(\ln(x^2+1)\Big|_{-R}^{R}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\left(\ln(R^2+1)-\ln((-R)^2+1)\right)=0$$

olduğundan (e.d) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+1}dx = 0$ olur.

4- Ders notlarından pozitif fonksi-
yonlar için karşılaştırma testi
soru olarak yazıldı, ispatı not-
larda var.

5) $a_n = \dfrac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{(2n-1)^2} - \dfrac{1}{(2n+1)^2}\right)$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

$$= \frac{1}{8}\left[\left(1-\cancel{\frac{1}{9}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{9}}-\cancel{\frac{1}{25}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{25}}-\cancel{\frac{1}{49}}\right)\cancel{+}\cdots\cancel{+}\left(\cancel{\frac{1}{(2n-1)^2}}-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)\right.$$

$$= \frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{8}\left(1-\dfrac{1}{(2n+1)^2}\right)\right) = \dfrac{1}{8}$ olduğundan seri yakınsak olup, toplamı da $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{1}{8}$ bulunur.

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\underbrace{\sin\frac{\pi}{2^n}}_{a_n} + \underbrace{\frac{(n+1)!}{2^n \cdot n!}}_{b_n}\right)$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$, ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{2^n \cdot n!}$ diyelim.

i) $\sin\dfrac{\pi}{2^n} < \dfrac{\pi}{2^n}$ ve $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n} = \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ olup,

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ geometrik serisi $\frac{1}{2}<1$ olduğundan yakınsaktır.

O halde karşılaştırma testi gereğince $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$ serisi de yakınsaktır.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n \cdot n!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{2^n \cdot n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)\cancel{(n+1)!}\,\cancel{2^n}\,\cancel{n!}}{\cancel{2^{n+1}}\,\cancel{(n+1)!}\,(n+1)\cdot n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{1}{2} < 1$$

olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n \cdot n!}$ serisi Dalembert oran testi gereğince yakınsaktır.

Yine yakınsak iki serinin toplamı yakınsak ve

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ olduğundan

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n \cdot n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{\pi}{2^n} + \frac{(n+1)!}{2^n \cdot n!} \right)$ serisi

de yakınsaktır.

7) $a_n = (-1)^n \frac{1}{\log n}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $n+1 > n \Rightarrow \log(n+1) > \log n$

$$\frac{1}{\log(n+1)} < \frac{1}{\log n} \Rightarrow |a_{n+1}| < |a_n|$$

ve $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0$ olduğundan Leibnitz testinden

dolayı verilen seri yakınsaktır.

Fakat $\sum_{n=1} \left| (-1)^n \cdot \frac{1}{\log n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log n}$ serisi,

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\log n \le n \Rightarrow \frac{1}{\log n} \geq \frac{1}{n}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ıraksak

olduğundan karşılaştırma testinden dolayı ıraksaktır.

O halde $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$ serisi koşullu yakınsaktır.

8) Ders notlarında var.